E.N.S.I. CHIMIE CENTRE Options P' TB 1981

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Soient f_1 et f_2 deux fonctions réelles continues définies dans R; on désigne par $f_1 * f_2$ la fonction, quand elle existe, définie par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u)\, f_2(u)\, du.$$

1° Soit f une fonction réelle continue définie sur R telle que, pour tout entier non négatif m, $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)\, x^m| = 0$; une telle fonction sera dite, dans la suite du problème, à décroissance rapide à l'infini.

Si p_k est une fonction polynôme de degré k, que peut-on dire de la fonction $f * p_k$?

2° f étant une fonction à décroissance rapide à l'infini et k un entier positif ou nul, on pose

$$f_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x^k\, dx.$$

Calculer les nombres f_k correspondant à la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On pourra utiliser le résultat

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$$

sans en donner la démonstration.

3° Soit f une fonction à décroissance rapide à l'infini telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ ne soit pas nul; $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ étant la suite des nombres définis dans la question précédente, vérifier que les relations

$$\begin{cases} f_0\, h_0 = 1 \\ \sum_{j=0}^{k} f_j\, h_{k-j} = 0 \qquad \text{si } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

définissent une suite de nombres réels $(h_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et montrer que le polynôme

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} h_{n-j} \frac{x^j}{j!}$$

satisfait à la relation

$$(f * \mathrm{H}_n)(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

4° Montrer que les polynômes $\mathrm{H}_n(x)$ satisfont aux relations

(1) $$\frac{d\,\mathrm{H}_n}{dx}(x) = \mathrm{H}_{n-1}(x)$$

(2) $$\mathrm{H}_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{H}_{n-k}(x) \frac{y^k}{k!}.$$

5° Dans le cas particulier où f désigne la fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, déterminer les polynômes $\mathrm{H}_0(x)$, $\mathrm{H}_1(x)$, $\mathrm{H}_2(x)$ et $\mathrm{H}_3(x)$.

6° Soient f et φ deux fonctions vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) f est à décroissance rapide à l'infini;

(2) pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$ la dérivée $k^{ième}$ de φ, notée $\varphi^{(k)}$, existe et est continue (par convention $\varphi^{(0)} = \varphi$);

.../...

(3) pour tout $k \in \{ 0, 1, \ldots, m+1 \}$ la fonction $f * \varphi^{(k)}$ existe.

Soit alors la fonction g_x définie par

$$g_x(y) = \int_0^{y-x} \mathrm{H}_m(x+u)\ \varphi^{(m+1)}(y-u)\ du.$$

Appliquer $m+1$ fois la formule d'intégration par parties à l'intégrale précédente et en déduire que l'on a

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\ \mathrm{H}_k(x) + \mathrm{R}_{m+1}(x)$$

où

$$a_k = (f * \varphi^{(k)})(0)$$

et

$$\mathrm{R}_{m+1}(x) = -(f * g_x)(0).$$

7° En appliquant la formule précédente aux fonctions f et φ définies respectivement par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = e^{\lambda x},$$

où λ est un nombre réel, déterminer l'expression de la fonction F telle que

$$\mathrm{F}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\ \mathrm{H}_k(x).$$

On admettra que la valeur de $\mathrm{R}_{m+1}(x)$, pour λ et x fixés, tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini.

8° En déduire que, dans le cas particulier où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$, on peut écrire

$$\mathrm{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{1}{\psi(x)}\ \frac{d^n}{dx^n}\ \psi(x)$$

où ψ est une fonction que l'on déterminera.

XXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail